ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HỒNG NHUNG

THUẬT TOÁN TÁCH CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HỒNG NHUNG

THUẬT TOÁN TÁCH CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: **GS.TS. Nguyễn Xuân Tấn**

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kì công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả luận văn

Trần Thị Hồng Nhung

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên tác giả xin được trân trọng bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sự kính trọng sâu sắc đến GS.TS. Nguyễn Xuân Tấn, người thầy đã nghiêm túc hướng dẫn, tận tâm chỉ bảo cho tác giả những kinh nghiệm trong học tập, nghiên cứu khoa học và sáng tạo, định hướng đúng đắn để tác giả hoàn thành tốt luận văn.

Tác giả xin chân thành bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian học tập tại trường.

Tác giả xin chân trọng cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán cùng các thầy cô đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn bạn bè và những người thân trong gia đình đã ủng hộ, động viên, giúp đỡ và đồng hành cùng tác giả trong suốt thời gian học Cao học cũng như trong thời gian tác giả thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, ngày   tháng   năm 2020

Học viên

Trần Thị Hồng Nhung

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Cho C là một tập hợp, $f : C\times C \to \mathbb{R}$ là một hàm thỏa mãn $f(x,x) = 0$. Bài toán: tìm $\bar{x} \in C$ sao cho $f(\bar{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in C$ được gọi là bài toán cân bằng, $\bar{x}$ được gọi là điểm cân bằng. Bài toán này đóng vai trò quan trọng cả về mặt lí thuyết lẫn thực tế. Nó bao gồm nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu như những trường hợp đặc biệt. Việc chỉ ra điều kiện để bài toán có nghiệm và việc tìm ra thuật toán để tính nghiệm đóng vai trò quan trọng.

Thuật ngữ cân bằng đã từ lâu được sử dụng rộng rãi trong các ngành khoa học như vật lý, hóa học, kĩ thuật, kinh tế... dưới các hình thức khác nhau, tùy thuộc vào các mô hình toán học khác nhau. Trong thời gian gần đây, bài toán cân bằng đã thu hút được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học, cả về phương diện lý thuyết lẫn thuật toán. Về phương diện lý thuyết, đã có khá nhiều nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm, tính ổn định, sự mở rộng của bài toán cân bằng. Các thuật toán hiện nay cơ bản dựa trên các kĩ thuật tìm nghiệm của bài toán tối ưu như thuật toán chiếu, thuật toán chiếu tăng cường, phương pháp hàm đánh giá,....Phần lớn các bài toán thuộc lớp các bài toán đạt không chỉnh, muốn giải được thì ta phải đưa bài toán đặt chỉnh. Việc áp dụng các thuật toán chiếu, hoặc chiếu tăng cường để giải một bài toán cân bằng hiệu chỉnh có thể gặp khó khăn trong tính toán khi song hàm hiệu chỉnh có cấu trúc phức tạp hơn so với từng song hàm f. Việc này dẫn đến nhu cầu giải bài toán cân bằng khi song hàm cân bằng có thể tách thành tổng của hai hay nhiều hàm khác và mỗi hàm có những tính chất tốt hơn hoặc dễ tính toán hơn. Mục đích của luận văn là trình bày một thuật toán tách cho bài toán cân bằng.

Luận văn được trình bày theo hai chương:

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản của giải tích lồi và bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh cũng như sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh
Chương 2: Trình bày thuật toán tách cho bài toán cân bằng

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 6 năm 2020
Tác giả

Trần Thị Hồng Nhung

Chương 1

Bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh

Trong chương này, tôi trình bày các kiến thức cơ bản về giải tích lồi và một số bổ đề cần thiết sẽ được sử dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm cũng như sự hội tụ của những thuật toán giải bài toán cân bằng trong các chương sau. Những kết quả trong luận văn còn có thể đúng cho các không gian tổng quát hơn nhưng để thuận tiện cho việc trình bày, ta chỉ giới hạn trong không gian Hilbert.

1.1 Các kiến thức cơ sở về giải tích lồi

1. Không gian Hilbert

Cho $\mathcal{H}$ là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Tích vô hướng trên $\mathcal{H}$ là ánh xạ $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.

(c) Với $x \in \mathcal{H}$ cố định thì hàm $\langle x, . \rangle : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là tuyến tính.

(d) Với $y \in \mathcal{H}$ cố định thì hàm $\langle ., y \rangle : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là tuyến tính.

Nếu $\langle .,. \rangle$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{H}$ thì ánh xạ $x \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$ với $x \in \mathcal{H}$ là một chuẩn trên $\mathcal{H}$, kí hiệu là $||.||$ và ánh xạ $(x, y) \to ||x - y||$ với $x, y \in \mathcal{H}$ là khoảng cách trên $\mathcal{H}$, kí hiệu là $d(x, y)$. Ta nói cặp $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ là không gian Hilbert nếu không gian định chuẩn tương ứng đầy đủ.

2. Tập lồi

Cho hai điểm $a, b \in \mathcal{H}$. Khi đó

- Đường thẳng đi qua hai điểm a, b là tập hợp có dạng:

$$\{x \in \mathcal{H} : x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

- Đoạn thẳng nối hai điểm a, b trong $\mathcal{H}$ có dạng:

$$[a, b] = \{x \in \mathcal{H} : x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda \in [0, 1]\}$$

Cho $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ và $\eta \in \mathbb{R}$. Một siêu phẳng với véc tơ pháp tuyến u trong $\mathcal{H}$ là một tập có dạng

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u\rangle = \eta\}.$$

Mỗi siêu phẳng chia không gian thành hai nửa, các tập

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u\rangle \leq \eta\}$$

và

$$\{x \in \mathcal{H} : \langle x, u\rangle < \eta\}$$

lần lượt được gọi là nửa không gian đóng và nửa không gian mở với véc tơ pháp tuyến ngoài u.

Định nghĩa 1.1.1. Một tập con C của $\mathcal{H}$ được gọi là lồi nếu với mọi $x, y \in C$ thì $[x, y] \subset C$ tức là

$$\lambda x + (1 - \lambda)y, \forall \lambda \in [0, 1] .$$

Định nghĩa 1.1.2. Cho C là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}$. Khoảng cách từ u đến C, kí hiệu là $d_C(u)$, được xác định bởi

$$d_C(u) = inf\{d(u, y) : y \in C\} = inf\{||u - y|| : y \in C\}.$$

Nếu có điểm $p \in C$ sao cho $||u - p|| = d_C(u)$ thì p được gọi là một hình chiếu của u trên C. Nếu mọi điểm trong $\mathcal{H}$ đều có duy nhất một hình chiếu trên C thì C được gọi là tập Chebyshev. Trong trường hợp này, quy tắc ứng với mỗi điểm trong $\mathcal{H}$ một hình chiếu duy nhất của nó trên C cho ta một toán tử gọi là toán tử chiếu trên C, được kí hiệu là P_C.

Ta có một kết quả cơ bản quen thuộc cho hình chiếu của một điểm trên một tập lồi đóng khác rỗng sau.

Định lý 1.1.1. *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$. Khi đó C là một tập Chebyshev và với mọi u và p trong $\mathcal{H}$,*

$$p = P_C(u) \Longleftrightarrow \left[p \in C \text{ và } (\forall y \in C)\langle u - p, y - p\rangle \leq 0\right].$$

Định nghĩa 1.1.3. Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Nón pháp tuyến của C tại x, kí hiệu là $N_C x$, được xác định bởi

$$N_C x = \begin{cases} \{u \in \mathcal{H} \mid \langle u, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in C\} & \text{nếu } x \in C\ , \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Tiếp theo đây là các khái niệm hội tụ mạnh và hội tụ yếu trong không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1.4. Một dãy $\{x_n\}$ trong $\mathcal{H}$ được gọi là

(i) hội tụ mạnh đến điểm x nếu $||x_n - x|| \to 0$ khi $n \to \infty$, kí hiệu là $x_n \to x$;

(ii) hội tụ yếu đến điểm x nếu với mọi $u \in \mathcal{H}$, $\langle x_n - x, u\rangle \to 0$ khi $n \to \infty$, kí hiệu là $x_n \rightharpoonup x$.

Bổ đề 1.1.1. *Cho $\{x_n\}_{n\geq 0}$ và $\{u_n\}_{n\geq 0}$ là các dãy trong $\mathcal{H}$, x và u là các điểm trong $\mathcal{H}$. Giả sử $x_n \rightharpoonup x$, $u_n \to \infty$. Khi đó $\langle x_n, u_n\rangle \to \langle x, u\rangle$ khi $n \to \infty$.*

Bổ đề 1.1.2. *Cho $\{x_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy bị chặn trong $\mathcal{H}$. Khi đó có một dãy con của $\{x_n\}n \geq 0$ hội tụ yếu.*

Tiếp theo sau đây là một số khái niệm quen thuộc về hàm số.

3. Hàm lồi

Định nghĩa 1.1.5. Cho C là một tập con khác rỗng của $\mathcal{H}$ và hàm $f : C \to [-\infty, +\infty]$.

- Miền hữu hiệu của f là tập: $domf = \{x \in C \mid f(x) < +\infty\}$.